CHUYÊN ĐỀ 2: MŨ VÀ LÔGARIT

BÀI 2. LÔGARIT

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

+ Biết khái niệm và tính chất của lôgarit.
+ Biết các quy tắc lôgarit và công thức đổi cơ số.
+ Biết các khái niệm lôgarit thập phân, lôgarit tự nhiên.

❖ **Kĩ năng**

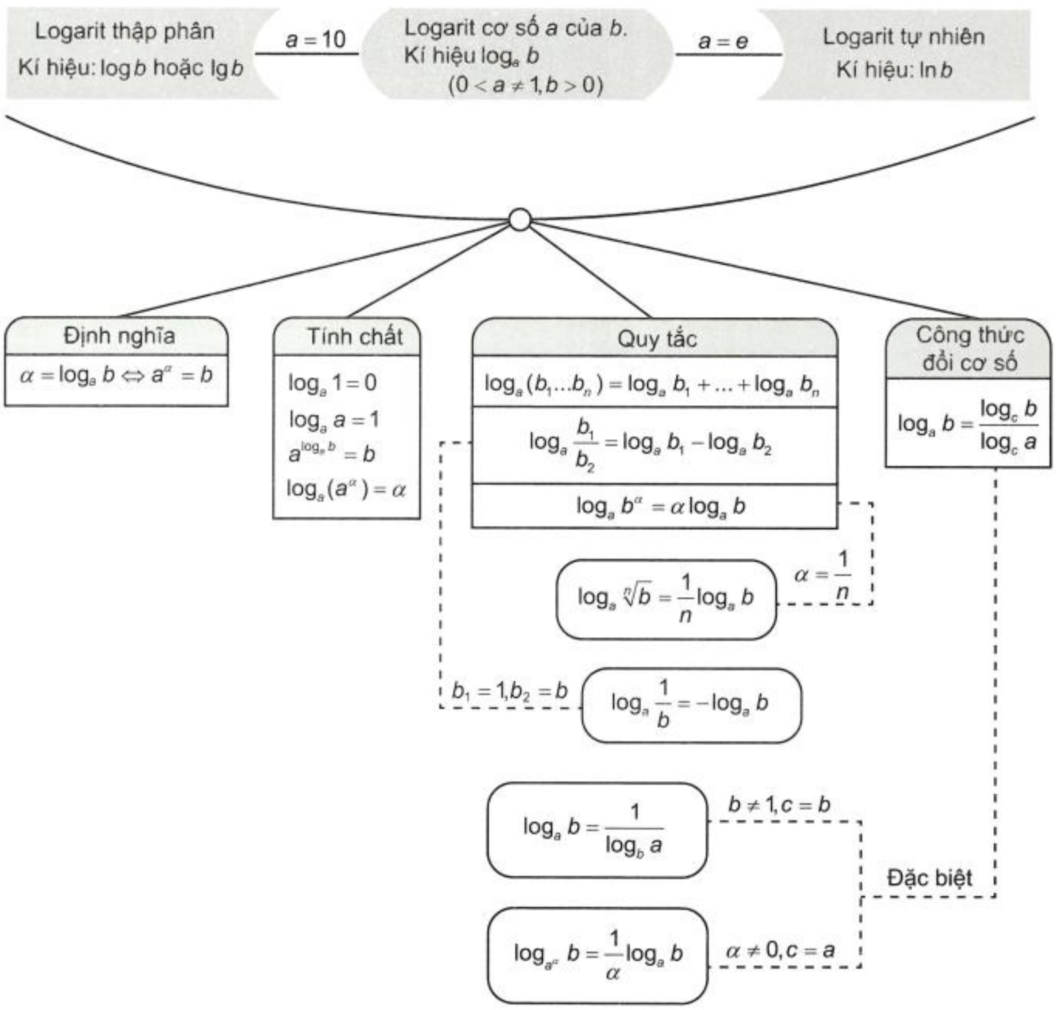
+ Biết vận dụng định nghĩa để tính một số biểu thức chứa lôgarit đơn giản.
+ Biết vận dụng các tính chất của lôgarit vào các bài toán biến đổi, tính toán các biểu thức chứa lôgarit.

I. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Khái niệm lôgarit Cho hai số dương a,b với $a\neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^{\alpha}=b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b, và ký hiệu là $\log_a = b$. **2. Tính chất** Cho $a,b>0, a\neq 1$. Ta có: $\boxed{\begin{array}{ll}\log_a = 0; & \log_a a = 1\\ a^{\log_a b}=b; & \log_a\left(a^{\alpha}\right)=\alpha\end{array}}$	**Nhận xét:** $\log_a b=\alpha \Leftrightarrow a^{\alpha}=b\ \left(a,b>0,a\neq 1\right)$ **Ví dụ:** $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3=8$ **Chú ý:** Không có lôgarit của số âm và số 0.
3. Quy tắc tính lôgarit **a. Lôgarit của một tích** Cho $a,b_1,b_2>0$ với $a\neq 1$, ta có: $\boxed{\log_a(b_1b_2)=log_a b_1 + log_a b_2}$ **Chú ý:** Định lý trên có thể mở rộng cho tích của n số dương: $\log_a\left(b_1...b_n\right)=\log_a b_1+...+\log_a b_n$ trong đó $a,b_1,b_2,...,b_n>0, a\neq 1$.	**Ví dụ:** • $\log_{\pi}\frac{1}{2}+\log_{\pi}2=\log_{\pi}\left(\frac{1}{2}.2\right)=\log_{\pi}1=0;$ • $\log_3\frac{1}{2}+\log_3\frac{2}{3}+\log_3\frac{3}{4}+...+\log_3\frac{7}{8}+\log_3\frac{8}{9}$ $=\log_3\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.....\frac{7}{8}.\frac{8}{9}\right)$ $=\log_3\frac{1}{9}=-2.$
b. Lôgarit của một thương Cho $a,b_1,b_2>0$ với $a\neq 1,$ ta có: $\boxed{\log_a=\frac{b_1}{b_2}=\log_a b_1-\log_a b_2}$ Đặc biệt: $\boxed{\log_a\frac{1}{b}=-\log_a b}$ $\left(a>0,b>0\right)$.	**Ví dụ:** • $\log_5\frac{125}{25}=\log_5 125-\log_5 25=3-2=1;$ • $\log_7\frac{1}{49}=-\log_7 49=-2.$
c. Lôgarit của một lũy thừa Cho hai số dương $a,b,\ a\neq 1$. Với mọi α, ta có: $\boxed{\log_a b^{\alpha}=\alpha\log_a b}$ Đặc biệt: $\boxed{\log_a\sqrt[n]{b}=\frac{1}{n}\log_a b}$	**Ví dụ:** • $\log_2 8^3=3\log_2 8=3.3=9;$ • $\log_2\sqrt[4]{8}=\frac{1}{4}\log_2 8=\frac{1}{4}.3=\frac{3}{4}.$
4. Đổi cơ số Cho $a,b,c>0; a\neq 1; c\neq 1,$ ta có:	**Ví dụ:** • $\log_8 16=\frac{\log_2 16}{\log_2 8}=\frac{4}{3};$

$\boxed{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}}$ Đặc biệt: $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$ $(b \neq 1)$; $\boxed{\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b}$ $(\alpha \neq 0)$.	• $\log_3 27 = \dfrac{1}{\log_{27} 3} = 3$; • $\log_{128} 2 = \log_{2^7} 2 = \dfrac{1}{7}\log_2 2 = \dfrac{1}{7}$.
5. Lôgarit thập phân – lôgarit tự nhiên **a. Lôgarit thập phân** Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. Với $b > 0$, $\log_{10} b$ thường được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$. **b. Lôgarit tự nhiên** Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e. Với $b > 0$, $\log_e b$ được viết là $\ln b$.	

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Biến đổi biểu thức lôgarit

Bài toán 1. Chứng minh đẳng thức

Ví dụ mẫu

<table>
<tr>
<td>

Ví dụ 1: Cho $x, y > 0$ và $x^2 + 4y^2 = 12xy$. Khẳng đinh nào sau đây đúng?

A. $\log_2(x+2y) = \log_2 x + \log_2 y + 1$.

B. $\log_2\left(\frac{x+2y}{4}\right) = \log_2 x - \log_2 y$.

C. $\log_2(x+2y) = 2 + \frac{1}{2}(\log_2 x + \log_2 y)$.

D. $4\log_2(x+2y) = \log_2 x + \log_2 y$.

Hướng dẫn giải

Với $x, y > 0$, ta có: $x^2 + 4y^2 = 12xy \Leftrightarrow (x+2y)^2 = 16xy$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2y)^2 = \log_2 16xy$$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x+2y) = 4 + \log_2 x + \log_2 y$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2y) = 2 + \frac{1}{2}(\log_2 x + \log_2 y).$$

Chọn C.

</td>
<td>

Nhận xét: Các lôgarit có mặt trong các đáp án đều có cùng cơ số 2. Do đó ta cũng có thể dùng các quy tắc của lôgarit, biến đổi từng đáp án đến khi thấy xuất hiện biểu thức không còn lôgarit và so sánh với giả thiết ban đầu để tìm ra đáp án đúng.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Ví dụ 2: Cho các số thực $a < b < 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\ln(ab)^2 = \ln(a^2) + \ln(b^2)$.

B. $\ln(\sqrt{ab}) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

C. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$.

D. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \ln(a^2) - \ln(b^2)$.

Hướng dẫn giải

Vì khi $a < b < 0$ không tồn tại $\ln a,\ \ln b$.

Chọn B.

Ví dụ 3: Cho a, b, c, d là các số thực dương, khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a^c = b^d \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{c}{d}$.

B. $a^c = b^d \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{d}{c}$.

C. $a^c = b^d \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{c}{d}$.

D. $a^c = b^d \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{d}{c}$.

Hướng dẫn giải

</td>
<td>

Chú ý: Khi biến đổi biểu thức chứa lôgarit, ta cần thận trọng trong việc lựa chọn tính chất, công thức, quy tắc sao cho biểu thức luôn xác định với điều kiện ban đầu.

</td>
</tr>
</table>

Do a, b, c, d là các số thực dương, khác 1 nên ta có: $$a^c = b^d \Leftrightarrow c\ln a = d\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{d}{c}.$$ **Chọn B.** **Ví dụ 4:** Với các số thực dương a, b bất kỳ, mệnh đề nào dưới đây đúng? **A.** $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b.$ **B.** $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b.$ **C.** $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b.$ **D.** $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b.$ **Hướng dẫn giải** Ta có: $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right) = \log_2\left(2a^3\right) - \log_2\left(b\right) = \log_2 2 + \log_2 a^3 - \log_2 b = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b.$ **Chọn A.**	

Bài toán 2. Tính giá trị của biểu thức không có điều kiện. Rút gọn biểu thức.

- **Phương pháp giải**

Để tính $\log_a b$ ta có thể biến đổi theo một trong các cách sau: • $b = a^\alpha$, từ đó suy ra $\log_a b = \log_a a^\alpha = \alpha;$ • $a = b^\alpha$, từ đó suy ra $\log_a \mathrm{b} = \log_{b^\alpha} b = \frac{1}{\alpha};$ • $a = c^\alpha$, $b = c^\beta$, từ đó ta suy ra $\log_a b = \log_{c^\alpha} c^\beta = \frac{\beta}{\alpha}.$ • Để tính $b^{\log_a c}$, ta biến đổi $b = a^\alpha$, từ đó suy ra $b^{\log_a c} = a^{\alpha\log_a c} = c^\alpha$	**Ví dụ:** • $\log_{32} 128 = \log_{2^5} 2^7 = \frac{7}{5};$ • $32^{\log_2 9} = 2^{5\log_2 9} = 9^5.$

- **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1: Cho $a,\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{d}>0$. Rút gọn biểu thức

$\mathrm{S}=\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{c}+\ln\frac{c}{d}+\ln\frac{d}{a}$ ta được

A. $S=1$. **B.** $\mathrm{S}=0$.

C. $S=\ln\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\right)$. **D.** $S=\ln\left(abcd\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $S=\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{c}+\ln\frac{c}{d}+\ln\frac{d}{a}=\ln\left(\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}.\frac{d}{a}\right)=\ln 1=0.$

Chọn B.

Ví dụ 2: Cho $a,b>0$ và $a,b\neq 1$, biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}}b^3.\log_b a^4$ bằng

A. 6 **B.** 24 **C.** 12. **D.** 18.

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$P=\log_{\sqrt{a}}b^3.\log_b a^4=\log_{a^{\frac{1}{2}}}b^3.\log_b a^4=\frac{3}{\frac{1}{2}}.4.\log_a b.\frac{1}{\log_a b}=24.$$

Chọn B.

Phương pháp giải trắc nghiệm: *Ta thấy các đáp án đều là các hằng số, như vậy ta dự đoán giá trị của P không phụ thuộc vào giá trị của* a,b. *Sử dụng máy tính bỏ túi Casio, thay* $a=b=2$ *vào biểu thức* $\log_{\sqrt{a}}b^3.\log_b a^4$ *rồi bấm =, được kết quả* $P=24$.

Chọn B.

Ví dụ 3: Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $a\neq 1$, $a\neq\sqrt{b}$ và $\log_a b=\sqrt{3}$.

Biến đổi biểu thức $\mathrm{P}=\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\sqrt{\frac{b}{a}}$ ta được

A. $P=-5+3\sqrt{3}$. **B.** $P=-1+\sqrt{3}$.

C. $P=-1-\sqrt{3}$. **D.** $P=-5-3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$P=\frac{\log_a\sqrt{\frac{b}{a}}}{\log_a\frac{\sqrt{b}}{a}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\log_a b-1\right)}{\log_a\sqrt{b}-1}=\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\frac{1}{2}\log_a b-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}=-1-\sqrt{3}.$$

Chọn C.

Phương pháp giải trắc nghiệm:

Chọn $a=2,b=2^{\sqrt{3}}$.

Bấm máy ta được

$$P=-1-\sqrt{3}.$$

Chọn C.

Ví dụ 4 : Biến đổi biểu thức

$P=\log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right)+\log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$ (với $0<a\neq 1,\ 0<b\neq 1$)

ta được

A. $P=2.$ **B.** $P=1.$ **C.** $P=\sqrt{3}.$ **D.** $P=\sqrt{2}.$

Hướng dẫn giải

Sử dụng các quy tắc biến đổi lôgarit ta có:

$$P=\log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right)+\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log_a a^{10}+\log_a b^2\right]+2\left[\log_a a-\log_a\sqrt{b}\right]+3.(-2)\log_b b$$

$$=\frac{1}{2}\left[10+2\log_a b\right]+2\left[1-\frac{1}{2}\log_a b\right]-6=1.$$

Chọn B.

Bài toán 3. Tính giá trị biểu thức theo một biểu thức đã cho

Phương pháp giải

Để tính $\log_a b$ theo $m=\log_a x; n=\log_a y$ ta biến đổi $b=a^\alpha.x^\beta.y^\gamma.$

Từ đó suy ra $\log_a b=\log_a a^\alpha.x^\beta.y^\gamma=\alpha+m\beta+n\gamma.$

Ví dụ: Cho $\log_a b=2,\log_a c=-3.$

Tính giá trị của $\log_a\dfrac{a^2b^3}{c^4}.$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\log_a\frac{a^2b^3}{c^4}=\log_a a^2+\log_a b^3-\log_a c^4$$

$$=2+3.2-4.(-3)=20.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho $\log_{12}27=a.$ Khi đó giá trị của $\log_6 16$ được tính theo *a* là

A. $\dfrac{4(3-a)}{3+a}.$ **B.** $\dfrac{4(3+a)}{3-a}.$ **C.** $\dfrac{4a}{3-a}.$ **D.** $\dfrac{2a}{3+a}.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $a=\log_{12}27=\dfrac{\log_2 27}{\log_2 12}=\dfrac{3\log_2 3}{2+\log_2 3}\Rightarrow\log_2 3=\dfrac{2a}{3-a}.$

Khi đó $\log_6 16=4\log_6 2=\dfrac{4}{\log_2 6}=\dfrac{4}{1+\log_2 3}=\dfrac{4}{1+\dfrac{2a}{3-a}}=\dfrac{4(3-a)}{3+a}.$

Chọn A.

Ví dụ 2. Cho $\lg 3 = a, \lg 2 = b$. Khi đó giá trị của $\log_{125} 30$ được tính theo *a* là:

A. $\dfrac{4(3-a)}{3-b}$. **B.** $\dfrac{1+a}{3(1-b)}$. **C.** $\dfrac{a}{3+b}$. **D.** $\dfrac{a}{3+a}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_{125} 30 = \dfrac{\lg 30}{\lg 125} = \dfrac{1+\lg 3}{3(1-\lg 2)} = \dfrac{1+a}{3(1-b)}$.

Chọn B.

Ví dụ 3. Cho $a = \log_2 3; b = \log_3 5; c = \log_7 2$. Khi đó giá trị của $\log_{140} 63$ được tính theo *a, b, c* là:

A. $\dfrac{2ac-1}{abc+2c+1}$. **B.** $\dfrac{abc+2c+1}{2ac+1}$.

C. $\dfrac{2ac+1}{abc+2c+1}$. **D.** $\dfrac{ac+1}{abc+2c+1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\log_{124} 63 = \frac{\log_2 63}{\log_2 140} = \frac{\log_2 3^2.7}{\log_2 2^2.5.7} = \frac{2\log_2 3 + \log_2 7}{2 + \log_2 5 + \log_2 7}$$

$$= \frac{2\log_2 3 + \dfrac{1}{\log_7 2}}{2 + \log_2 3.\log_3 5 + \dfrac{1}{\log_7 2}} = \frac{2a + \dfrac{1}{c}}{2 + ab + \dfrac{1}{c}}$$

$$= \frac{1+2ac}{1+2c+abc}.$$

Chọn C.

Trắc nghiệm: *Sử dụng máy tính: gán lần lượt* $\log_2 3, \log_3 5, \log_7 2$ *cho a, b, c. Lấy* $\log_{140} 63$ *trừ đi lần lượt các đáp án ở A, B, C, D. Kết quả nào bằng 0 thì đó là đáp án.*

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG MÁY TÍNH

- **Phương pháp giải**

Cơ sở lý thuyết: $\boxed{A = B \Leftrightarrow A - B = 0}$

+) Đây là một nhận định cực kì cơ bản nhưng dựa vào nó ta có thể có các kỹ thuật bấm rất nhanh gọn phù hợp với yêu cầu của thi trắc nghiệm.

+) Khi đề bài cho dưới dạng tính giá trị của biểu thức *P* và bên dưới cho 4 đáp án. Khi đó 1 trong 4 đáp án sẽ bằng *P* và ta sử dụng máy tính bỏ túi để tìm ra đáp án đúng một cách nhanh nhất.

- **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1. Nếu $a = \log_{15} 3$ thì

A. $\log_{25}15=\dfrac{3}{5\left(1-a\right)}$.   **B.** $\log_{25}15=\dfrac{5}{3\left(1-a\right)}$.

C. $\log_{25}15=\dfrac{1}{2\left(1-a\right)}$.   **D.** $\log_{25}15=\dfrac{1}{5\left(1-a\right)}$.

Hướng dẫn giải

Tư duy tự luận thì ta làm như sau:

Ta có: $a=\log_{15}3=\dfrac{1}{\log_3(3.5)}=\dfrac{1}{1+\log_3 5}\Rightarrow \log_3 5=\dfrac{1}{a}-1=\dfrac{1-a}{a.}$

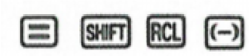
Khi đó: $\log_{25}15=\dfrac{1}{2}\log_5 15=\dfrac{1}{2}\log_5\left(5.3\right)=\dfrac{1}{2}\left(1+\log_5 3\right)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\log_3 5}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\frac{1-a}{a}}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{1-a}\right)=\frac{1}{2\left(1-a\right)}.$$

Chọn C.

Bây giờ, ta sẽ sử dụng casio - vinacal theo cơ sở lí thuyết đã trình bày ở trên để giải bài toán này.

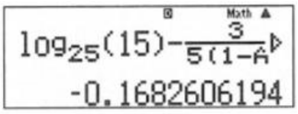
Bước 1: Để dễ dàng bấm máy ta gán các giá trị $\log_{15}3$ cho A.



Bấm $\log_{15}3$.

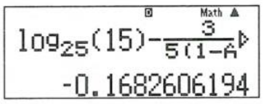
Bước 2: Nhập biểu thức: $\log_{25}15-(...)$

Lần 1: Nhập $\log_{25}15-\dfrac{3}{3(1-A)}=$



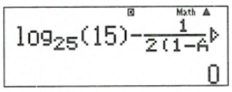
Loại A.

Lần 2: Bấm ◄ để sửa biểu thức thành $\log_{25}15-\dfrac{5}{2(1-A)}=$



Loại B.

Lần 3: Bấm ◄ để sửa biểu thức thành $\log_{25}15-\dfrac{1}{2(1-A)}=$



Chọn C.

Ví dụ 2. Đặt $a=\log_2 3,\ b=\log_5 3.$ Biểu diễn $\log_6 45$ theo *a, b* ta được

A. $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab}.$ **B.** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab}.$

C. $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab+b}.$ **D.** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_2 3=a\Leftrightarrow \log_3 2=\dfrac{1}{a}$ và $\log_5 3=b\Leftrightarrow \log_3 5=\dfrac{1}{b}.$

Khi đó:

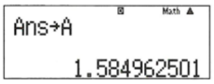
$$\log_6 45=\frac{\log_3 45}{\log_3 6}=\frac{\log_3 9+\log_3 5}{\log_3 3+\log_3 2}=\frac{2+\log_3 5}{1+\log_3 2}=\frac{2+\dfrac{1}{b}}{1+\dfrac{1}{a}}=\frac{a\left(1+2b\right)}{b\left(1+a\right)}=\frac{a+2ab}{b+ab}.$$

Chọn C.

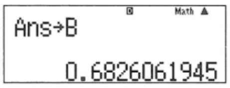
SỬ DỤNG MÁY TÍNH BỎ TÚI (CASIO HAY VINACAL) ĐỂ GIẢI NHƯ SAU:

Bước 1: Để dễ dàng bấm máy ta gán các giá trị $\log_2 3,\ \log_5 3$ cho A, B.

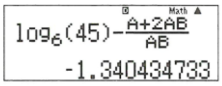
Gán $\log_2 3=A.$ Bấm $\log_2 3.$ 



Gán $\log_5 3=B.$ Bấm $\log_5 3.$ 

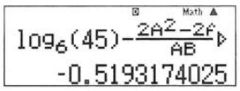


Bước 2: Nhập biểu thức: $\log_6 45-\left(...\right)$

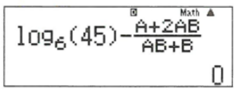
Lần 1: Nhập $\log_6 45-\dfrac{A+2AB}{AB}=$ 

Loại A.

Lần 2: Bấm  để sửa biểu thức thành $\log_6 45-\dfrac{2A^2-2AB}{AB}=$



Loại B.

Lần 3: Bấm  để sửa biểu thức thành $\log_6 45-\dfrac{A+2AB}{AB+B}=$ 

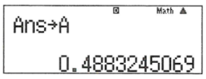
Chọn C.

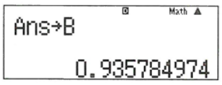
Ví dụ 3. Nếu $log_{27}5=a;\log_8 7=b;\log_2 3=c$ thì $\log_{12}35$ bằng

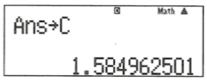
A. $\frac{3b+2ac}{c+2}$. **B.** $\frac{3b+3ac}{c+2}$. **C.** $\frac{3b+2ac}{c+3}$. **D.** $\frac{3b+3ac}{c+1}$.

Hướng dẫn giải

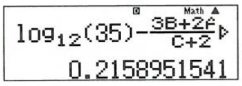
Bước 1: Để dễ dàng bấm máy ta gán các giá trị $\log_{27}5, \log_8 7, \log_2 3$ cho A, B, C.

Gán $\log_{27}5 = A$. **Bấm** $\log_{27}5$. 

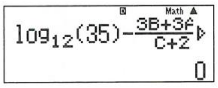
Gán $\log_8 7 = B$. **Bấm** $\log_8 7$.  

Gán $\log_2 3 = C$. **Bấm** $\log_2 3$.  

Bước 2: Nhập biểu thức: $\log_{12}35 - (...)$

Lần 1: Nhập $\log_{12}35 - \frac{3B+2AC}{C+2} =$ 

Loại **A**.

Lần 2: Bấm  để sửa biểu thức thành $\log_{12}35 - \frac{3B+3AC}{C+2} =$ 

Chọn B.

Dạng 2: Tính giá trị của biểu thức chưa lôgarit theo một biểu thức đã cho

Phương pháp giải

Để tính $\log_a b$ theo $m=\log_a x; n=\log_a y$, ta sẽ biến đổi $b=a^\alpha.x^\beta.y^\gamma$.

Từ đó suy ra: $\log_a \mathrm{b}=\log_a a^\alpha.x^\beta.y^\gamma=\alpha+m\beta+n\gamma$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho $\log_{12}27=a$. Khi đó giá trị của $\log_6 16$ tính theo *a* bằng

A. $\dfrac{4(3-a)}{3+a}$. **B.** $\dfrac{4(3+a)}{3-a}$. **C.** $\dfrac{4a}{3-a}$. **D.** $\dfrac{2a}{3+a}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\mathrm{a}=\log_{12}27=\dfrac{\log_2 27}{\log_2 12}=\dfrac{3\log_2 3}{2+\log_2 3}\Rightarrow \log_2 3=\dfrac{2a}{3-a}$.

$$\log_6 16=4\log_6 2=\frac{4}{\log_2 6}=\frac{4}{1+\log_2 3}=\frac{4}{1+\dfrac{2a}{3-a}}=\frac{4(3-a)}{3+a}.$$

Chọn A.

Thật vậy:

$$\log_a b=\log_a a^\alpha.x^\beta.\mathrm{y}^\gamma$$
$$=\alpha+\beta.\log_a x+\gamma.\log_a y$$
$$=\alpha+m\beta+n\gamma.$$

Phương pháp trắc nghiệm:

Sử dụng máy tính: gán $\log_{12}27=A$.

Lấy $\log_6 16$ trừ đi lần lượt các đáp số ở A, B, C, D kết quả nào bằng 0 thì đó là đáp án.

Chọn A.

Ví dụ 2: Cho $\log 3=a,\log 2=b$. Khi đó giá trị của $\log_{125}30$ tính theo *a* là

A. $\dfrac{4(3-a)}{3-b}$. **B.** $\dfrac{1+a}{3(1-b)}$. **C.** $\dfrac{a}{3+b}$. **D.** $\dfrac{a}{3+a}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_{125}30=\dfrac{\log 30}{\log 125}=\dfrac{1+\log 3}{3(1-\log 2)}=\dfrac{1+a}{3(1-b)}$.

Chọn B.

Phương pháp trắc nghiệm:

Sử dụng máy tính: gán lần lượt $\log 3=A;\log 2=B$.

Lấy $\log_{140}63$ trừ đi lần lượt các đáp án số ở A, B, C, D, kết quả nào bằng 0 thì đó là đáp án.

Ví dụ 3: Cho $a=\log_2 3; b=\log_3 5; c=\log_7 2$. Khi đó giá trị của biểu thức $\log_{140}63$ được tính theo *a, b, c* là

A. $\dfrac{2ac-1}{abc+2c+1}$. **B.** $\dfrac{abc+2ac+1}{2ac+1}$.

C. $\dfrac{2ac+1}{abc+2c+1}$. **D.** $\dfrac{ac+1}{abc+2c+1}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\log_{140}63=\dfrac{\log_2 63}{\log_2 140}=\dfrac{\log_2 3^2.7}{\log_2 2^2.5.7}=\dfrac{2\log_2 3+\log_2 7}{2+\log_2 5+\log_2 7}$

Phương pháp trắc nghiệm:

Sử dụng máy tính: gán lần lượt $\log_2 3=A;\log_3 5=B;\log_7 2=C$.

$= \dfrac{2\log_2 3 + \dfrac{1}{\log_7 2}}{2 + \log_2 3.\log_3 5 + \dfrac{1}{\log_7 2}} = \dfrac{2a + \dfrac{1}{c}}{2 + ab + \dfrac{1}{c}} = \dfrac{1 + 2ac}{1 + 2c + abc}$ **Chọn C.**	*Lấy $\log_{140} 63$ trừ đi lần lượt các đáp án số ở A, B, C, D, kết quả nào bằng 0 thì đó là đáp án.*

Ví dụ 4. Cho các số thực $a, b, c \in \left[1; 2\right]$ thỏa mãn điều kiện $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \le 1$

Khi biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3\left(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c\right)$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 3. **B.** $3.2^{\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}}$. **C.** 4. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Ta xét hàm số $f\left(x\right) = x^3 - 3x\log_2 x - \log_2^3 c$ với $x \in \left[1; 2\right]$.

Ta có đạo hàm $f'\left(x\right) = 3x^2 - 3\log_2 x - \dfrac{3}{\ln 2} - \dfrac{3\log_2^2 x}{x\ln 2}$;

$f''\left(x\right) = 6x - \dfrac{3}{x\ln 2} - \dfrac{6log_2 x}{x^2\ln^2 2} + \dfrac{3\log_2^2 x}{x^2\ln 2}$.

Vì $f'''\left(x\right) = 6\left(1 - \dfrac{1}{x^3\ln^3 2}\right) + \dfrac{3}{x^2\ln 2} + \dfrac{6\log_2 x\left(3 - \log_2 x\right)}{x^3\ln^2 2} > 0\ \forall x \in \left[1; 2\right]$ nên

$f''\left(x\right) \ge f''\left(1\right) \approx 1,67 > 0$.

Như vậy hàm số $f'(x)$ đồng biến và có nghiệm duy nhất trên $[1;2]$ vì $f'(1)<0; f'(2)>0$ và có đồ thị lõm trên $[1;2]$. Do đó ta có bảng biến thiên

x	1		x_0		2
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên ta nhận thấy rằng $f(x)\le 1$ cho nên

$P \le 3+\log_2^3 a+\log_2^3 b+\log_2^3 c \le 4$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1, c=2$ và các hoán vị.

Chọn C.

Ví dụ 5. Trong tất cả các cặp $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\ge 1$. Với giá trị nào của *m* thì tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ sao cho $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$?

A. $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$.

B. $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$ và $\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2$.

C. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ và $\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

D. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $4x+4y-4\ge 0$.

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\ge 1$

$\Leftrightarrow 4x+4y-4\ge x^2+y^2+2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2\le 2\ (C_1)$.

Miền nghiệm của bất phương trình là hình tròn (cả bờ) (C_1) có tâm $I_1(2;2)$ bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

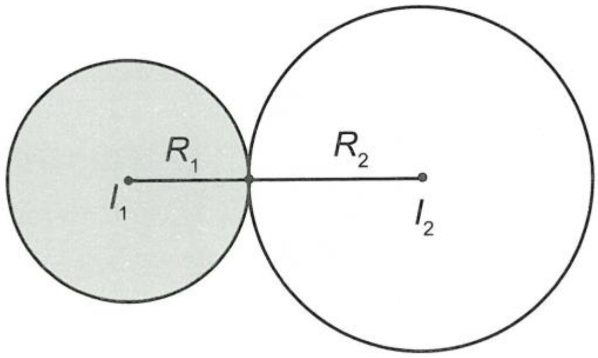
Mặt khác: $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=m\ (*)$.

Với $m=0$ thì $x=-1; y=1$ (không thỏa mãn $(x-2)^2+(y-2)^2\le 2$).

Với $m>0$ thì $(*)$ là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1;1)$ bán kính $R_2=\sqrt{m}$.

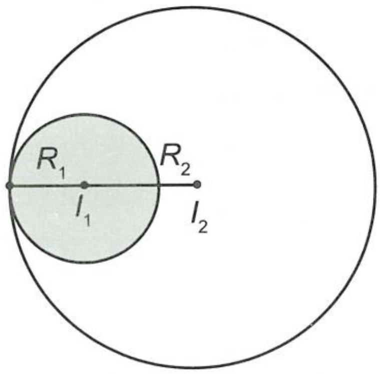
Để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thì (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau.

Trường hợp 1: (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài.



Khi đó: $R_1 + R_2 = I_1I_2 \Leftrightarrow \sqrt{m} + \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = \left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)^2$.

Trường hợp 2: $\left(C_1\right)$ nằm trong $\left(C_2\right)$ và hai đường tròn tiếp xúc trong.



Khi đó: $R_2 - R_1 = I_1I_2 \Leftrightarrow \sqrt{m} - \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = \left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)^2$.

Vậy $m = \left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)^2$ và $m = \left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)^2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Ví dụ 6. Xét các số thực *a, b* thỏa mãn $a > b > 1$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$ bằng

A. $P_{\min} = 19$. **B.** $P_{\min} = 13$. **C.** $P_{\min} = 14$. **D.** $P_{\min} = 15$.

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$P = \log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{2}{\log_a \frac{a}{b}}\right)^2 + 3\left(\log_b a - 1\right)$$

$$= \left(\frac{2}{1 - \log_a b}\right)^2 + 3\left(\log_b a - 1\right).$$

Đặt $\log_a b = t\ \left(0<t<1\right)$. Khi đó $P=\dfrac{4}{\left(1-t\right)^2}+\dfrac{3}{t}-3=f\left(t\right)$ với $0<t<1$.

Ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{8}{\left(1-t\right)^3}-\dfrac{3}{t^2}\Rightarrow f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	15	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $P_{\min}=15$.

Chọn D.

Ví dụ 7. Cho hai số thực *x*, *y* thỏa mãn:

$$x^2+y^2\ge 3 \text{ và } \log_{x^2+y^2}\left[x\left(4x^2-3x+4y^2\right)-3y^2\right]\ge 2$$

Gọi *M* và *m* lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x-y$.

Khi đó biểu thức $T=2\left(M+m+1\right)$ có giá trị gần nhất số nào sau đây?

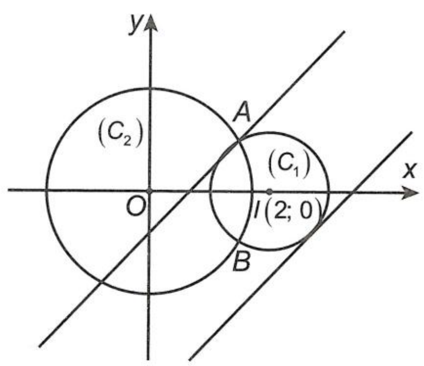
A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Ta có $\log_{x^2+y^2}\left[x\left(4x^2-3x+4y^2\right)-3y^2\right]\ge 2\Leftrightarrow \log_{x^2+y^2}\left[\left(x^2+y^2\right)\left(4x-3\right)\right]\ge 2$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)\left(4x-3\right)\ge\left(x^2+y^2\right)^2\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2+y^2\le 1.$

Tập hợp các số thực *x*, *y* thỏa mãn: $\begin{cases}x^2+y^2\ge 3\\ \left(x-2\right)^2+y^2\le 1\end{cases}$ những điểm thuộc miền trong hình tròn $\left(C_1\right)$ có tâm $I\left(2;0\right)$, bán kính $R_1=1$ và nằm ngoài hình tròn $\left(C_2\right)$ có tâm $O\left(0;0\right)$ và bán kính $R_2=\sqrt{3}$.



Biểu thức: $P = x - y \Rightarrow x - y - P = 0$ là họ đường thẳng Δ song song với đường $y = x$.

Các giao điểm của hai hình tròn là $A\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

P đạt giá trị nhỏ nhất khi đường thẳng Δ đi qua A.

Khi đường thẳng Δ qua điểm A, ta có: $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-P_{\min}=0 \Rightarrow P_{\min}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

P đạt giá trị lớn nhất khi đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn $\left(C_1\right)$ ta có:

$d\left(I;\Delta\right)=R_1 \Leftrightarrow \frac{\left|2-P\right|}{\sqrt{1+1}}=1 \Leftrightarrow P=2\pm\sqrt{2} \Leftrightarrow P_{\max}=2+\sqrt{2}.$

Do đó $T=2\left(M+m+1\right)=2\left(2+\sqrt{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)\approx 10.$

Chọn D